RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

22 gennaio 1922.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica. — *Sull'assorbimento della gravitazione.* Nota V del Corrispondente Quirino Majorana.

Sistema ottico per la lettura delle oscillazioni. Il giogo della bilancia porta alla sommità uno specchio piano S_1 (fig. 3), destinato a riflettere l'immagine di un filamento incandescente di una lampada $^1/_2$ watt [1]. Questa è situata in un ambiente diverso da quello in cui trovasi la bilancia, e propriamente a 8 metri di distanza; con ciò il movimento dei piombi nel sotterraneo non produce sensibili spostamenti nella posizione di detta lampada, venendo questa a poggiare su di una vôlta non cimentata dalla coppia variabile occasionata dalla armatura AB (fig. 2). I raggi della lampada sono racolti da un obbiettivo con distanza focale di circa 2 metri, situato nello stesso ambiente della lampada, fra questa e la bilancia. Il fascio riflesso da S_1 traversa l'ambiente della lampada e dell'obbiettivo e raggiunge il *posto di osservazione* sito in un terzo ambiente nel quale trovasi una scala millimetrata alta m. 1,80: lo zero della scala è in alto, e la sua distanza dalla bilancia risulta di 20 metri. Su di essa si forma dunque l'immagine del filamento della lampada, costituita da un tratto luminoso orizzontale, largo circa 2 mm., e lungo 50, i cui bordi appajono più o meno netti a seconda dell'aggiustaggio più o meno perfetto del descritto sistema

[1] Vedi avvertenze a p. 24, vol. XXIX di questi Rendiconti.

ottico. Particolari e minuziose cure occorrono per raggiungere tale risultato. Anzitutto osservo che ho scelto uno specchio S_1, piano anzichè concavo, perchè così i lievissimi sollevamenti od abbassamenti dell'ordine del decimo di millimetro), provocati dal moto dei piombi sul sostegno della bilancia, non si vengano a trasferire nell'immagine del filamento sulla scala. Oltre a ciò, occorre che l'asse ottico dell'obbiettivo sia esattamente coincidente con la congiungente della lampada con S_1: la più piccola inclinazione rende sfumati i bordi dell'immagine. Occorre poi scegliere la lampada $^1/_2$ watt fra parecchie, affinchè il vetro di essa non occasioni eguale inconveniente. Infine, per quanto la lastra di vetro a facce ben piane e parallele, destinata a chiudere la finestra della scatola contenente S_1 (fig. 3), sia spessa (circa 7 mm.), è sempre osservabile un cambiamento assai notevole nella nettezza dei bordi a seconda che si sia, o no, praticato il vuoto nella custodia della bilancia. Ciò è dovuto a lievissime ed inevitabili deformazioni della lastra per la pressione atmosferica. Si debbono dunque aggiustare le distanze fra le varie parti del sistema ottico, quando il vuoto sia già stato praticato, ed anzi quando ciò sia già avvenuto da più ore, intervenendo dei fenomeni di deformazione progressiva della lastra.

Quando tutte le cautele suaccennate si siano adottate, è possibile, servendosi di una lente di ingrandimento e fissando uno dei bordi dell'immagine luminosa, determinare la posizione di questa colla precisione di 1 a 2 decimi di mm.

Posto di osservazione. Esso è situato, come si è detto, a circa 20 metri dalla bilancia, e contiene, oltre la scala millimetrata verticale, le chiavi (interruttori e commutatori) per la manovra dei motorini elettrici che occasionano il movimento dei piombi nel sotterraneo, e le sei lampadine elettriche le quali controllano la posizione di questi rispetto alla sfera, di cui si disse a suo tempo. Altri congegni, la cui funzione sarà spiegata in seguito, si trovano inoltre al posto di osservazione.

Primi tentativi di osservazioni. La disposizione descritta fu già allestita, con tutti gli accennati particolari, sin dal luglio 1920; e già allora cominciai a cercar di osservare se lo spostamento dei piombi da PP a P′P′ (fig. 2) avesse una qualche influenza sulla posizione di equilibrio della bilancia. Avevo anzitutto cura di far sì che la coincidenza del centro della sfera M con quella del cubo P′P′ avvenisse con quella precisione di cui già dissi; indi, notata la posizione dell'indice luminoso sulla scala al posto di osservazione, liberavo il giogo, e ne regolavo la posizione di equilibrio mediante i descritti equilibratori a sabbia, in guisa che essa fosse prossima alla precedente, a meno di qualche centimetro. In ogni caso tale posizione era determinata con tre letture di oscillazioni, come nella prima serie di ricerche. E poscia, mediante la manovra delle chiavi di comando elettrico, leggevo alternativamente la posizione d'equilibrio della bilancia *senza piombi*, cioè trovan-

dosi i piombi in PP, e quella *con piombi*, cioè avendo spostato i piombi in P'P'.

Questa serie di letture aveva luogo quando la bilancia era carica col sistema *sfera-contrappeso*; ed essa durava per uno o due giorni, con varie sedute al posto di osservazione di un pajo d'ore circa, separate da intervalli altrettanto lunghi, o dal periodo notturno; di solito, infatti, non ho più proceduto, con questa nuova disposizione, ad osservazioni nel corso della notte, per le ragioni altra volta esposte. Si aveva cura di osservare il manometro connesso alla bilancia; e, se del caso, si riportava, tra una seduta e l'altra, la pressione nella custodia a meno di 1 mm. di mercurio.

Rialzato il giogo, scambiata la sfera colla tara, mediante il congegno B_1B_2 (fig. 3), procedevo alla lettura di una seconda serie col sistema *tara-contrappeso*, del tutto analoga alla prima; indi ad altra nuovamente con *sfera-contrappeso*; e così di seguito, per più mesi. Si comprende lo scopo di tale modo di procedere: contavo di poter così discriminare l'effetto perturbatore dei piombi, dovuto alle deformazioni elastiche della vôlta e dell'edificio, dall'effetto ricercato.

Infatti, quando sperimentavo con *sfera-contrappeso*, avevo da fare con la somma dei due effetti, e,nell'altro caso, soltanto con quello perturbatore.

Debbo ora dire che, pur osservando sensibili spostamenti della posizione di equilibrio della bilancia tanto con *sfera-contrappeso* (effetto lordo), quanto con *tara-contrappeso* (lettura in bianco) al muoversi dei piombi nel sotterraneo, e pur avendo continuato per 8 o 9 mesi in tal genere di misure, non potei mai ottenere risultati veramente concordanti; è per tale ragione che non trascrivo qui nessuna delle osservazioni numeriche fatte in tale periodo di tempo. Rimasi per lungo tempo incerto sulla causa di codesta irregolarità, ed alla fine, dopo laboriosissimi tentativi, riuscii a comprenderla bene e ad eliminarla; essa proveniva dalle mutevoli condizioni elastiche dell'edificio. Infatti questo, costruito con mattoni, calce, calcinacci, etc., viene a costituire un sistema, dal punto di vista elastico, tutt'altro che perfetto; i fenomeni di isteresi sono in esso accentuatissimi e capricciosissimi.

Da esperienza ad esperienza si notavano differenze persino del 100 %, negli spostamenti della posizione di equilibrio, al muoversi dei piombi. Delle volte, l'assestamento della muratura dell'edificio era tale, che nessuno spostamento si manifestava sulla bilancia, al mutar della posizione dei piombi. In tali condizioni si comprende come l'*effetto in bianco* fosse nullo; ma il sistema era in uno stato di grande instabilità. Bastava infatti il passaggio di un carro, od anche un colpo di martello nell'edificio in un ambiente prossimo a quello della bilancia, perchè si verificasse lo spostamento. A volte, per periodi di 15 giorni od un mese, poteva forse accadere che le osservazioni varie fossero concordanti, e che si potesse abbastanza bene distinguere l'effetto ricercato, sottraendo dalla media degli effetti lordi la media delle letture in bianco;

ma era possibile che poi, in conseguenza di un nuovo misterioso assestamento della muratura, l'accordo cessasse del tutto, o magari che la lettura in bianco mutasse addirittura di segno.

L'influenza del moto dei piombi sulla posizione di equilibrio della bilancia si manifesta, per quanto già dissi nella Nota II, in conseguenza del fatto che il profilo del coltello è tondeggiante e non aguzzo: in sostanza si tratta di una rotazione della vôlta che si trasferisce al piano di agata di appoggio del coltello, e quindi, con valore in generale mutato, a tutto il giogo. Per quanto esposi a suo tempo, se il coltello ha un raggio di curvatura molto piccolo, tanto cioè che il centro di gravità del giogo sia al di sotto del punto di contatto del coltello col piano di agata, deve la rotazione del giogo essere più piccola di quella di tutto il sostegno; ed è questo il caso che si è presentato quasi sempre nelle mie esperienze. Solo in un certo periodo di esse, essendosi eccessivamente detoriato il coltello, tanto da assumere un profilo a curvatura piccola, ossia a grande raggio di curvatura (circa 20 micron), avvenne il caso opposto, cioè che la rotazione del giogo fosse maggiore di quella del sostegno. Prescindendo da questo caso eccezionale, dirò che l'effetto in bianco, quello cioè osservabile per il moto dei piombi, quando il giogo è carico col sistema *tara-contrappeso*, era variabile fra 1 e 8 mm., sulla scala a 20 metri al posto di osservazione; tale incertezza era dovuta alla causa più sopra discussa. Per contro, l'effetto ricercato, corrispondente cioè al fenomeno di assorbimento gravitazionale, non corretto dalle altre cause di errore nettamente prevedibili di cui si dirà, non doveva essere che di qualche decimo di mm., od al massimo di 1 mm. Non era dunque possibile discernere un effetto tanto delicato, frammisto all'altro irregolarissimo che poteva diventare persino dieci volte maggiore. E l'unica via da seguirsi era quella di cercare di eliminare del tutto *a priori* tale effetto pertubartore ed ingombrante. A tale fine occorreva escogitare un artificio, nella qual cosa riuscii dopo lunghi tentativi, dei quali descriverò soltanto l'ultimo, che mi ha dato i migliori risultati.

Controllo a mercurio dell'inclinazione della bilancia. In fondo, il lamentato inconveniente proveniva dal fatto che la bilancia subiva, da una misura all'altra, delle inclinazioni variabili fra 0 e 10″ circa e senza alcuna regolarità, per lo spostamento dei piombi dall'una all'altra posizione. Un metodo per eliminare tale incoveniente sarebbe dunque stato quello di correggere ad ogni misura le inclinazioni stesse, riportando il sostegno della bilancia sempre nella stessa posizione angolare. Ora 10″ di arco fanno, a 20 m. di distanza, circa 2 mm. di spostamento di un raggio di luce riflesso; e la eventuale correzione che si sarebbe potuta ottenere, provocando uno spostamento della bilancia inverso (tale cioè da riportare un raggio riflesso da uno specchio fissato al suo sostegno, nella sua primitiva posizione) avrebbe risentita l'incertezza delle letture fatte sulla scala millimetrata (1 a 2 decimi di mm.); cioè di $^1/_{10}$ circa del suo valore nel caso dei 10″, ed anche

molto di più per rotazioni più piccole. L'artificio che ora descriverò mi ha invece permesso di esaltare enormemente la constatazione degli spostamenti angolari della bilancia, e quindi di correggerli con tutta esattezza.

Al piede della bilancia (fig. 3) è fissato un tubo di vetro orizzontale YY lungo m. 1,60 circa, di mm. 5 di diametro, coassiale con altro tubo esterno più grosso, XX, pure in vetro, che serve così di sostegno al primo. Il tubo YY è riempito di mercurio e termina ai suoi due estremi in due serbatoj di ebanite, contenenti anch'essi mercurio, di cui solo quello di destra, U, è segnato in figura; tali serbatoj sono dunque due vasi comunicanti a pelo libero, ed il liquido in essi si dispone esattamente allo stesso livello. Ma relativamente a ciascuno dei due recipienti, p. es. a quello U di destra, il livello del mercurio muta al variare dell'inclinazione del sostegno della bilancia; tale variazione è tanto più notevole quanto maggiore è la lunghezza del tubo YY. Il valore scelto per tale lunghezza, corrisponde ai bisogni della attuale ricerca; esso può evidentemente variarsi a piacere, se il congegno in parola dovesse venire impiegato per altri scopi. Sulla regione centrale del mercurio contenuto in U galleggia un dischetto O portante una acuminata punta verticale di acciajo; ed al recipiente sono fissate altre due punte pure in acciajo di cui una sola si scorge nel disegno, la cui posizione può essere spostata verticalmente, mediante la vite di regolaggio r. Su codeste tre punte appoggia, per il suo peso, un dischetto di vetro portante uno specchietto piano verticale S_2. Si comprende che al variar del livello del mercurio tale specchietto si inclini variamente, e un raggio di luce ottenuto in maniera del tutto simile a quello che batte su S_1, viene riflesso da S_2 anche sulla scala di m. 1,80 al posto di osservazione. Si ha cura che l'immagine del filamento della seconda lampada $^1/_2$ watt a ciò necessaria, si formi in località alquanto più bassa o più alta di quella in cui si osserva quella riflessa da S_1. Con ciò l'osservatore può sorvegliare facilmente le due immagini, perchè vicine e non sovrapposte.

Ora, nello scegliere i valori della lunghezza del tubo YY, e della distanza fra la punta galleggiante O e le altre due fisse, mi è stato facile far sì che, mentre l'immagine riflessa da S_1 (quando il giogo è arrestato) si sposta per il moto dei piombi di circa 2 mm., quella riflessa da S_2 si sposti di circa 200 mm.; cioè le rotazioni del sostegno della bilancia o del suo piano di agata sono svelate con una precisione 100 volte maggiore di quanto avverrebbe col comune congegno a semplice riflessione su di uno specchio. Siccome si possono apprezzare almeno i 2/10 di mm., e corrispondendo i 2 mm. a 10″ d'arco, si vede che il descritto congegno permette di apprezzare sino a $^1/_{100}$ di 1″. Tale sensibilità è più che sufficiente per le misure di cui qui si parla, ma mi piace rilevare che il dispositivo potrebbe essere reso, nel caso di altre ricerche, ancora più sensibile; non sembra infatti che l'assestamento del mercurio nell'interno dei recipienti U possa per attriti od altra causa ostacolare tale accrescimento di sensibilità.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Nuova condizione necessaria per un estremo di un integrale doppio.* Nota I di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Nella mia Nota *Nuova dimostrazione della necessità della condizione di Jacobi*, ultimamente apparsa in questi Rendiconti, della necessità di detta condizione per un minimo dell'integrale semplice

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2,$$

è data una dimostrazione che consente, conservando le solite notazioni impiegate in quella Nota, di enunciare la indicata condizione sotto questa nuova forma:

TEOREMA A. — *Supposto* $R(x) > 0$ *in* (x_1, x_2), *detta* $G(x, \xi)$ *la funzione di Green relativa all'espressione differenziale* $\frac{d}{dx}\left(R\frac{du}{dx}\right)$ *e alle condizioni ai limiti* $u(x_1) = u(x_2) = 0$ [1], *indicando con* $\Delta(\lambda)$ *la funzione intiera in* λ *esprimente il determinante dell'equazione integrale di Fredholm*

$$u(x) = \lambda \int_{x_1}^{x_2} G(x, \xi)\, A(\xi)\, u(\xi)\, d\xi,$$

condizione necessaria affinchè l'estremale $y = y_0(x)$ — *alla quale si riferiscono le funzioni* $R(x)$ *e* $A(x)$ — *fornisca un minimo per l'integrale* $J(y)$ *è che l'indicata funzione intiera* [2] *non abbia alcuno zero interno all'intervallo* $(0, 1)$.

Si ha pure che:

TEOREMA B. — *Se la funzione intiera* $\Delta(\lambda)$ *risulta diversa da zero in tutto l'intervallo* $(0, 1)$, *estremi inclusi, l'estremale* $y = y_0(x)$ *fornisce certamente un minimo debole per l'integrale* $J(y)$.

Scopo della Nota presente, e di una successiva, è di mostrare che un teorema, *perfettamente* analogo al *Teorema A*, esprime una condizione ne-

[1] Cfr. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* [Teubner, 1912], pp. 39-58; Picone, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine* (Tesi d'abilitazione) [Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa, vol. XI], pp. 73-88. Quivi, posto $t(x, \xi) = \int_x^\xi [1 : R(\eta)]\, d\eta$, si trova $G(x, \xi) = t(x, x_1)\, t(x_2, \xi) : t(x_2, x_1)$ per $x \leq \xi$; $G(x, \xi) = t(x_1, \xi)\, t(x, x_2) : t(x_2, x_1)$ per $x \geq \xi$.

[2] La quale, com'è noto, è priva di zeri complessi, ed ha il valore *uno* per $\lambda = 0$.

cessaria cui deve soddisfare una superficie estremale $z = z_0(x, y)$ per l'integrale doppio

$$J(z) = \int\int_D f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

affinchè con essa si possa effettivamente realizzare un minimo per l'integrale.

1. Supponiamo *regolare* il dominio D al quale viene esteso l'integrale $J(z)$. Il contorno C di D sia costituito dalla curva esterna, regolare, semplice e chiusa C_0 e dalle curve interne, regolari, semplici e chiuse $C_1, C_2 \dots C_\nu$. Detto s l'arco della curva $C_i (i = 0, 1, \dots, \nu)$, siano $x = x_i(s)$, $y = y_i(s)$ $(0 \leq s \leq l_i)$, le equazioni parametriche della curva. Sia Δ il dominio dello spazio definito dalle condizioni (x, y) in D, $|z| \leq a$. Supponiamo che la funzione $f(x\, y\, z\, p\, q)$ sia definita nell'insieme T formato dalle quintuple di valori x, y, z, p, q, per ciascuna delle quali x, y, z esprimono le coordinate di un punto di Δ, e p e q sono due numeri reali qualsivogliano; e supponiamo che la f si conservi continua in T, con tutte le sue derivate parziali dei primi *quattro* ordini.

Siano ora assegnate le $\nu + 1$ funzioni, di s, $z = z_i(s)$ $(i = 0, 1, \dots, \nu)$. Ciascuna funzione $z_i(s)$ sia definita nell'intervallo $(0, l_i)$, e sia ivi finita e continua con la sua derivata prima, sia periodica e di periodo l_i e soddisfi inoltre alla limitazione $|z_i(s)| < a$. La curva Γ_i dello spazio, di equazioni parametriche $x = x_i(s)$, $y = y_i(s)$, $z = z_i(s)$, sarà regolare, semplice e chiusa, avrà per biunivoca proiezione sul piano (x, y) la curva C_i e starà completamente nell'interno dello strato Σ limitato dai due piani orizzontali $z = -a$ e $z = +a$.

Noi porremo nel modo seguente il problema di calcolo delle variazioni per l'integrale $J(z)$:

Nell'insieme S *delle funzioni, delle due variabili* x *e* y, *definite in* D, *ivi finite e continue con le loro derivate prime e verificanti le condizioni*

$$(1) \qquad z[x_i(s), y_i(s)] = z_i(s), \quad |z(x, y)| < a,$$

determinarne una tale che per essa l'integrale $J(z)$ *riesca un minimo.* In altre parole: *costruire una porzione di superficie regolare aperta, di base* D, *completamente interna allo strato* Σ, *avente l'assegnato bordo* Γ *costituito dalle* $\nu + 1$ *curve chiuse* $\Gamma_0, \Gamma_1 \dots, \Gamma_\nu$, *per la quale l'integrale* $J(z)$ *realizzi un minimo nell'insieme* S.

2. Nelle ordinarie trattazioni di questo problema [1] si consente alle derivate prime delle funzioni $z(x, y)$ — lasciando intatte tutte le altre condizioni — di presentare in D, pur rimanendo limitate, delle discontinuità. Precisamente si suppone che, per ogni funzione $z = z(x, y)$, verificante sempre le condizioni (1), si possa decomporre il dominio D in un numero finito di dominii regolari, in ciascuno dei quali la funzione riesca finita e continua con le sue derivate prime, risultando inoltre la funzione continua

[1] Cfr. Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung* [Teubner, 1909], pag. 653.

in tutto D. L'integrale $J(z)$ non perde, perciò, il suo significato riemanniano, ma già fin da ora si viene però a rompere l'analogia con la trattazione che si suol fare dei problemi ad una dimensione di calcolo delle variazioni.

Tale fatto è, parmi, in primo luogo, causato dal modo come finora si è dedotta la terza condizione necessaria — analoga a quella di Jacobi per i problemi ad una dimensione — affinchè un'estremale per l'integrale $J(z)$ fornisca effettivamente un estremo. A tale condizione è pervenuto il Sommerfeld [1], estendendo il procedimento, dato da Schwarz, per dimostrare la necessità della condizione di Jacobi ad una dimensione. Estendendo, invece, il procedimento da me seguìto nella Nota sopracitata, si giunge al seguente teorema, *perfettamente* analogo a quello qui enunciato in principio:

Teorema A — *Supponiamo che l'estremale* $z = z_0(x, y)$ *per l'integrale* $J(z)$, *appartenendo all'insieme* S, *risulti in* D *finita e continua con le sue derivate parziali dei primi* due *ordini, e che, posto*

$$f_{zz}\left(x, y, z_0, \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}\right) = P(x, y), \quad f_{zp}\left(x, y, z_0, \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}\right) = Q_1(x, y),$$

$$f_{zq}\left(x, y, z_0, \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}\right) = Q_2(x, y), \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} - P(x, y) = A(x, y),$$

$$f_{pp}\left(x, y, z_0, \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}\right) = R_{11}(x, y), \quad f_{pq}\left(x, y, z_0, \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}\right) = R_{12}(x, y),$$

$$f_{qq}\left(x, y, z_0, \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}\right) = R_{22}(x, y),$$

risulti, in D,

$$R_{11}(x, y) > 0, \quad R_{11}(x, y)\, R_{22}(x, y) - R_{12}^2(x, y) > 0,$$

e la funzione $A(x, y)$ *finita e continua con le sue derivate prime. Allora, detta* $G(xy, \xi\eta)$ *la funzione di Green relativa all'espressione alle derivate parziali*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(R_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + R_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(R_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + R_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

e alla condizione al contorno

$$u(x, y) \quad su\ C = 0,$$

indicando con $\Delta(\lambda)$ *la funzione intiera in* λ *esprimente il determinante della equazione integrale di Fredholm*

$$u(xy) = \lambda \int\int_D G(xy, \xi\eta)\, A(\xi\eta)\, u(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

condizione necessaria affinchè l'estremale $z = z_0(x, y)$ *fornisca, nell'insieme* S, *un minimo per l'integrale* $J(z)$ *è che l'indicata funzione intiera* [2] *non abbia alcuno zero nell'interno dell'intervallo* $(0, 1)$.

Nella Nota a questa successiva esporrò la semplicissima dimostrazione di questo teorema.

[1] *Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung* [Bd. VII, 1899], p. 188. Cfr. Bolza, op. cit., p. 676.

[2] La quale è priva di zeri complessi ed ha il valore *uno* per $\lambda = 0$.

Matematica. — *Sopra un tipo di equazioni integrali non lineari.* Nota II di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Analogamente, se poniamo

$$h(x) - w_3(x) = u_3(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \mathrm{K}^{(r)}[x, y; h(y) - w_2(y)]\, dy =$$

$$= u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \mathrm{K}^{(r)}[x, y; u_2(y)]\, dy,$$

sostituendo alla $u(x)$ il suo valore dato dalla (1), si ottiene

$$w_3(x) = \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \left\{ \mathrm{K}^{(r)}[x, y; h(y) - w_2(y)] - \mathrm{K}^{(r)}[x, y; h(y)] \right\} dy =$$

$$= -\lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} w_2(y)\, \mathrm{K}'^{(r)}_{h(y)}[x, y; h(y) - \theta_2^{(r)} w_2(y)]\, dy.$$

E poichè

$$h(y) - \theta_2^{(r)} w_2(y) = u(y) + w_1(y) - \theta_2^{(r)} w_2(y),$$

con

$$|\, w_1(y) - \theta_2^{(r)} w_2(y)\,| < 2\sigma,$$

avremo

$$w_3(x) < |\lambda|\, \varrho\sigma \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(\chi)} |\, \mathrm{K}'^{(r)}_{u(y)}[x, y; u(y) + \{ w_1(y) - \theta_2^{(r)} w_2(y) \}]\,|\, dy$$

$$< |\lambda|\, pm\varrho\sigma = \varrho^2\sigma.$$

Così continuando, avremo in generale $|\, w_n(x)\,| < \sigma\varrho^{n-1}$ e quindi, per essere $\varrho < 1$, $\lim_{n=\infty} |\, w_n(x)\,| = 0$. La funzione $h(x) = \lim_{n=\infty} u_n(x)$ sarà perciò una soluzione della (1), sempre sotto la condizione che valga la (4). Ora passeremo a dimostrare che tale condizione è realmente soddisfatta.

5. Ricordiamo, a tale scopo, che per le $u_n(x)$ abbiano trovato le seguenti espressioni:

$$u_1(x) = u(x)$$

$$u_n(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \mathrm{K}^{(r)}[x, y; u_{n-1}(y)]\, dy = u(x) + \psi_{n-1}(x).$$

$$(n = 2, 3, 4, \ldots)$$

Posto allora $|u(x)| < \nu$, ed ammesso che sia

$$\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} K^{(r)}[x, y; o]\, dy = 0 \ (^1), \quad (r = 1, 2, 3, \dots, p)$$

per la $u_2(x)$ possiamo scrivere

$$u_2(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \Big\{ K^{(r)}[x, y; u_1(y)] - K^{(r)}[x, y; o] \Big\}\, dy =$$

$$= u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} u_1(y)\, K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; \theta^{(r)} u_1(y)]\, dy; \quad (o < \theta^{(r)} < 1)$$

da cui si deduce

$$|u_2(x)| < \nu + |\lambda|\, \nu \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} |K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; \theta^{(r)} u(y)]|\, dy;$$

e, per la (2) della Nota precedente

$$|u_2(x)| < \nu + |\lambda|\, pm\nu = \nu(1 + \varrho).$$

6. Per la $u_3(x)$ scriviamo

$$u_3(x) - u(x) -$$

$$- \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \Big\{ K^{(r)}[x, y; u(y) + \psi_1(y)] - K^{(r)}[x, y; u(y)] \Big\}\, dy + \Phi(x),$$

dove

$$\Phi(x) = -\lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} K^{(r)}[x, y; u(y)]\, dy = -$$

$$- \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} u(y)\, K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; \theta_0^{(r)} u(y)]\, dy;$$

con $o < \theta_0^{(r)} < 1$; ed anche, applicando il teorema del valor medio,

$$u_3(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \psi_1(y)\, K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; u(y) + \theta_1^{(r)} \psi_1(y)]\, dy. \ (o < \theta_1^{(r)} < 1)$$

E poichè

$$|\Phi(x)| < |\lambda|\, pm\nu = \varrho\nu,$$

supposto, pel momento, che sia $|\psi_1(x)| < \sigma$, avremo

$$|u_3(x)| < \nu + |\lambda|\, pm\varrho\nu + \varrho\nu = \nu(1 + \varrho + \varrho^2);$$

e quindi anche

$$|\psi_2(x)| < \nu(\varrho + \varrho^2).$$

7. Analogamente, per la u_4 scriviamo

$$u_4(x) = u(x) -$$

$$- \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \Big\{ K^{(r)}[x, y; u(y) + \psi_2(y)] - K^{(r)}[x, y; u(y)] \Big\}\, dy + \Phi(x) =$$

$$= u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \psi_2(y)\, K'^{(r)}_{u(y)}[x, y; u(y) + \theta_2^{(r)} \psi_2(y)]\, dy + \Phi(x);$$

$$(o < \theta_2^{(r)} < 1)$$

(1) Questa condizione non è essenziale; qui fu posta unicamente per semplicità.

per cui, supposto che sia $|\psi_2(y)| < \sigma$, avremo

$$u_4(x) < \nu + |\lambda| pm\nu(\varrho + \varrho^2) + \varrho\nu = \nu(1 + \varrho + \varrho^2 + \varrho^3).$$

Operando similmente sulla $u_5(x)$ e sulle successive e supponendo che, per ogni valore di n, sia

$$|\psi_n(x)| < \sigma, \tag{5}$$

otterremo

$$|u_n(x)| < \nu(1 + \varrho + \varrho^2 + \ldots + \varrho^{n-1});$$

e quindi anche

$$|\psi_{n-1}(x)| < \nu[\varrho + \varrho^2 + \ldots + \varrho^{n-1}] < \frac{\nu\varrho}{1 - \varrho}.$$

Avremo di conseguenza

$$|h(x) - u(x)| = \lim_{n=\infty} |u_n(x) - u(x)| = \lim_{n=\infty} |\psi_{n-1}(x)| < \frac{\nu\varrho}{1 - \varrho}.$$

Mediante la trasformazione indicata al n. 2, avendo ottenuto che sia $\varrho < k < \frac{\sigma}{\nu + \sigma}$, rimangono verificate contemporaneamente tanto la condizione (4) quanto la (5).

Relatività. — *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.* Nota II di Enrico Fermi, presentata dal Corrispondente G. Armellini.

3. Prima di passare all'applicazione fisica dei risultati ottenuti, vogliamo ancora fare qualche osservazione geometrica. È evidente intanto che le considerazioni precedenti, e quindi anche la formula (5) che ne è la conclusione, che per varietà qualunque sono valide solo vicino ad L, sono invece completamente rigorose per spazî euclidei. Associamo allora alla linea L della V_n una linea L* di uno spazio euclideo S_n, in cui indichiamo con x_i^* le coordinate cartesiane ortogonali. Se con degli asterischi indichiamo i simboli riferentisi alla linea L*, potremo scrivere per S_n la formula analoga a (5):

$$ds^2_{M^*} = (1 + C^* \times M^* - P^*)\, ds^2_{P^*} + d\overline{y}_1^{*2} + d\overline{y}_2^{*2} + \cdots + d\overline{y}_{n-1}^{*2}; \tag{5}^*$$

come nella (5) C è funzione di s_P, così nella (5)* C* è funzione di s_{P^*}.

Siano $K^{(1)}\, K^{(2)} \ldots K^{(n-1)}$ le componenti controvarianti di C relative a $\overline{y}_1\, \overline{y}_2 \ldots \overline{y}_{n-1}$ e $K^{(1)*}\, K^{(2)*} \ldots K^{(n-1)*}$ quelle di C* relative alle $\overline{y}^*$. Cerchiamo se si possa determinare L' in modo che le funzioni $K^{(r)*}(s_P)$ diventino eguali alle $K^{(r)}(s_P)$. Cominceremo perciò a porre $s_P = s_{P^*}$, cioè a stabilire tra i punti di L e quelli di L* una corrispondenza biunivoca che conserva

gli archi. Osserviamo poi che $K^{(r)*}$ è la proiezione di C^* sulla r^{esima} direzione y^*. È cioè

$$K^{(r)*} = \sum_{i=1}^{i=n} y^*_{i/r} \frac{d^2 x_i^*}{ds_P^2} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Le $K^{(r)}$ sono poi funzioni note di s_P. La condizione $K^{(r)} = K^{(r)*}$ conduce dunque alle $(n-1)$ equazioni

$$K^{(r)}(s_P) = \sum_{i=1}^{i=n} y^*_{i/r} \frac{d^2 x_i^*}{ds_P^2} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{7}$$

D'altra parte le (3), scritte per l'S_n, ci dànno $n(n-1)$ altre equazioni. Se a queste aggiungiamo l'altra

$$ds_P^2 = dx_1^{*2} + dx_2^{*2} + \cdots + dx_n^{*2}, \tag{8}$$

troviamo un sistema di $n - 1 + n(n-1) + 1 = n^2$ equazioni tra le n^2 incognite x_i^*, $y^*_{i/r}$ che servono ad esprimerle in funzione di s_P. Possiamo così determinare le equazioni parametriche $x_i^* = x_i^*(s_P)$ della L'. Con ciò la formula (5)* diventa identica alla (5), ossia abbiamo rappresentato per applicabilità i dintorni della linea L', sui dintorni di L. Siccome poi L' è in uno spazio euclideo, possiamo dire anche di aver disteso i dintorni di L in uno spazio euclideo, ossia di aver trovato coordinate che sono geodetiche contemporaneamente in tutti i punti di L.

Chimica. — *Cloriti di ammonio e di alcuni ammonii sostituiti* (1). Nota di Giorgio Renato Levi, presentata dal Corrisp. Giuseppe Bruni.

Nel 1915 pubblicavo negli Atti del R. Istituto Veneto (2), in collaborazione col prof. G. Bruni, una Nota sui cloriti; in seguito ebbi ad occuparmi altre volte dell'argomento ma sempre in modo frammentario. Solo da alcuni mesi mi è stato possibile riprendere sistematicamente il lavoro su questo argomento.

In questa Nota riferirò sulla preparazione dei cloriti di ammonio e di alcune ammoniache sostituite. Ho potuto isolare allo stato solido i cloriti di ammonio e di tetrametilammonio e in soluzione concentrata quelli di mono-, di- e trimetilammina.

Per la precedente letteratura sui cloriti rimando al lavoro citato.

Clorito di ammonio NH_4ClO_2. — Questo sale si presentava particolarmente interessante perchè, data la scarsa energia della base e la volati-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale del R. Politecnico di Milano.
(2) Vol. 74, pag. 1711; Gazzetta chimica, *45*, 161 (1915).

lità dei prodotti di decomposizione, appariva dubbia la possibilità di ottenerlo sotto forma stabile. L'esperienza ha invece insegnato che ciò riesce perfettamente. Ho ottenuto questo sale per doppio scambio fra clorito di bario puro e solfato ammonico nei rapporti stechiometrici. Una soluzione concentrata e possibilmente satura di clorito di bario a 15-20° viene addizionata, agitando, della quantità calcolata di clorito ammonico pure in soluzione quasi satura; dopo 10 minuti si filtra il precipitato di solfato di bario, e la soluzione ottenuta si evapora nel vuoto a temperatura ambiente in presenza di cloruro di calcio fuso. Per rendere più rapida la filtrazione ed evitare che buona parte della soluzione rimanga sul filtro col precipitato di solfato di bario, è preferibile fare una prima filtrazione alla pompa, con che si trattiene la quasi totalità del precipitato, e rifiltrare poi su di un piccolo filtro ordinario la soluzione un po' torbida che così si ottiene.

La soluzione di clorito ammonico ottenuta dopo filtrazione del solfato di bario è perfettamente incolora; ma con la concentrazione nel vuoto diventa leggermente paglierina, pur non svolgendo odore di cloro o di composti ossigenati di questo. Per ulteriore concentrazione, fino a secchezza, il clorito ammonico si separa in lunghi aghi prismatici trasparenti, di color giallo molto pallido. Si deve osservare che impurezze eventualmente presenti, e in particolare tracce di metalli pesanti, provocano facilmente decomposizione almeno parziale nella concentrazione del clorito ammonico.

L'analisi del prodotto ottenuto per completa evaporazione nel vuoto fu preceduta da una determinazione di residuo fisso del sale dopo riduzione con soluzione di acido solforoso. Ottenni 0,12% di residuo fisso in accordo con l'assenza di sali di bario nella soluzione.

Le percentuali di ammoniaca e cloro trovate sono:

Ammoniaca %			Cloro %		
Trovato		Calcolato per NH_4ClO_2	Trovato		Calcolato per NH_4ClO_2
19,29			39,32		
18,90	media 19,07	19,88	39,50	media 39,44	41,47
19,02			39,52		

Rapporto Cl/NH_3 trovato 2,068; calcolato 2,086.

Per l'analisi la soluzione acquosa di una quantità pesata di clorito ammonico si addiziona in una sola volta di un eccesso di soluzione di acido solforoso; in tal modo il clorito viene ridotto immediatamente a cloruro e, se entrambe le soluzioni sono diluite e l'acido solforoso si aggiunge in una sola volta, non si ha alcuna perdita di cloro.

Per determinare l'ammoniaca, si soprassatura la soluzione ridotta con idrato sodico e si distilla raccogliendo in acido titolato. Per determinare il cloro, si aggiunge alla soluzione ridotta acido nitrico diluito, e la solu-

zione bollente si precipita con nitrato di argento; il cloruro formato si raccoglie in crogiuolo di Gooch e si secca a 130°.

I risultati analitici dànno valori sensibilmente più bassi del teorico, ma ciò si deve attribuire ad umidità persistente nel clorito ammonico: difatti il rapporto Cl/NH_3 è in buon accordo col valore teorico e, di più, la completa assenza di solfati e di sali di bario esclude la presenza di clorito di bario o di solfato ammonico in eccesso.

Se per decomposizione del clorito si fosse formato del cloruro ammonico, si sarebbero ottenuti valori più alti del teorico e la soluzione diluita del sale avrebbe dato, con nitrato di argento, precipitato di cloruro, mentre solo le soluzioni concentrate precipitano in giallo cristallino il clorito di argento e le soluzioni diluite non precipitano affatto.

Il clorito ammonico solido non appare deliquescente. Si decompone rapidamente per riscaldamento; per percussione su incudine esplode e da questo comportamento il clorito ammonico appare più instabile del nitrito ammonico; la stabilità del sale secco all'aria appare invece maggiore pel clorito che non pel nitrito, quest'ultimo essendo più igroscopico. La scomposizione ha luogo verosimilmente secondo l'equazione:

$$2NH_4ClO_2 \longrightarrow N_2 + Cl_2 + 4H_2O.$$

Clorito di monometilammina $NH_2.CH_3.HClO_2$. — Una soluzione acquosa di monometilammina al 30 % (circa) si neutralizza con acido solforico 2N e la soluzione così avuta si addiziona a freddo agitando della quantità esattamente calcolata di clorito di bario puro, si filtra e si concentra nel vuoto; si ottiene in tal modo una soluzione un po' densa, che non precipita con alcool e etere, che non solidifica a —15° e che non cristallizza, anche se lasciata una settimana nel vuoto in presenza di cloruro di calcio fuso. Questa soluzione densa diede all'analisi il seguente risultato:

Monometilammina %		Cloro %	
Trovato	Calcolato per $NH_2.CH_3.HClO_2$	Trovato	Calcolato per $NH_2.CH_3.HClO_2$
20,63	31,16	23,90	35,63

Rapporto Cl/monometilammina trovato 1,159; calcolato 1,143.

Il prodotto così ottenuto è quindi una soluzione concentrata (intorno al 66-67 %) di clorito di monometilammina. Se durante la concentrazione si ha cura di aggiungere un leggero eccesso di monometilammina, si evita un principio di scomposizione e la soluzione non dà con nitrato d'argento la reazione dei cloruri neanche in tracce, ma un precipitato giallo cristallino di clorito di argento puro. Questa soluzione concentrata dà, versata su una pietra di ferro calda, una leggera detonazione.

Clorito di dimetilammina $NH(CH_3)_2.HClO_2$. — Si ottiene come soluzione concentrata in modo del tutto analogo al precedente. La soluzione deve essere concentrata con le stesse precauzioni. Si decompone col calore in modo analogo al clorito di monometilammina.

Il rapporto Cl/dimetilammina diede il valore 0,799; teorico calcolato 0,7878.

Clorito di trimetilammina $N(CH_3)_3.HClO_2$. — Si prepara in modo del tutto analogo al sale di monometilammina; alla concentrazione si ha una maggior tendenza alla decomposizione; la soluzione al 50 % è però sufficientemente stabile. Pel rapporto Cl/trimetilammina trovai il valore 0,670; calcolato 0,6009.

Clorito di tetrametilammonio $N(CH_3)_4ClO_2$. — La soluzione ottenuta per doppio scambio fra clorito di bario e solfato di tetrametilammonio si lascia evaporare nel vuoto in presenza di cloruro di calcio, senza alcuna scomposizione; e perciò qui, a differenza dalle ammine, è inutile l'aggiunta di un leggero eccesso di idrato di tetrametilammonio. Quando il prodotto è quasi secco, lo si comprime fra carta da filtro per liberarlo dall'acqua madre; e i cristalli perfettamente incolori, così avuti, si seccano nel vuoto in presenza di potassa caustica.

L'analisi fu fatta pel cloro in modo del tutto analogo ai cloriti precedenti e cioè, previa riduzione a cloruro con acido solforoso, precipitando con nitrato d'argento in soluzione nitrica.

Per determinare l'idrato di tetrametilammonio si riduce la soluzione di clorito con acido solforoso; si concentra a bagno maria, e il residuo si scioglie in acido solforico concentrato; infine si opera come in una ordinaria determinazione Kjeldahl.

L'analisi diede il seguente risultato:

Azoto %		Cloro %	
Trovato	Calcolato per $N(CH_3)_4ClO_2$	Trovato	Calcolato per $N(CH_3)_4ClO_2$
9,75		24,80	
9,50	9,90	24,92	25,05
9,55		24,65	

Il clorito di tetrametilammonio esplode per percussione come il clorito ammonico; a differenza di questo, è fortemente deliquescente. In soluzione acquosa ha reazione neutra.

Ho contemporaneamente ripreso lo studio dei cloriti metallici e sono riuscito a preparare alcuni nuovi sali che descriverò in una prossima Nota.

Geologia. — *Osservazioni intorno al Quaternario dell' Umbria centrale.* Nota di Paolo Principi, presentata dal Socio A. Issel.

Ai depositi fluvio-lacustri del Villafranchiano con *Mastodon arvernensis*, *Tapirus arvernensis*, *Machaerodus crenatidens*, ecc., si sovrappongono, in varie località, dei conglomerati costituiti generalmente da calcari marnosi e arenarie terziarie, più raramente da calcari mesozoici, i quali si trovano su altipiani e a circa 150-200 metri sugli alvei dei corsi d'acqua attuali e che per l'altezza stanno probabilmente a rappresentare il *Mindeliense* (colline di Perugia, di Montefalco, di Todi, ecc.). Nella valle del Tevere, da Umbertide a Todi, a questi terreni succedono, lungo ambedue i versanti, delle sabbie argillose con intercalazioni di lenti ghiaiose ad elementi minuti, le quali si trovano in rialzo sulle alluvioni più recenti del fiume e presentano un evidente fenomeno di terrazzamento. Questi terrazzi, però, sono variamente incisi e modificati dai torrenti, che dalle alture circostanti convogliano le loro acque al Tevere. Essi si riscontrano pure ai due lati del torrente Puglia, lungo la parte inferiore della valle del Chiascio, e si estendono sotto le pendici settentrionali del monte di Bettona fin presso Cannara, costituiti, specialmente verso quest'ultima località, da un'argilla giallastra contenente delle concrezioni calcareo argillose formanti una specie di ghiaietta, chiamata *cacoro*. Anche qui i terrazzi sono profondamente solcati ed erosi dalle acque, fenomeno reso anche più accentuato dall'abbassamento del letto del Topino.

In questi depositi alluvionali dell'*alta terrazza*, a Civitella d'Arno, Colombella, presso S. Martino Delfico, Castel delle Forme, Cerqueto, si rinvennero resti di *Elephas primigenius*, *Elephas antiquus* e *Rhinoceros Mercki*. La presenza dell'*Elephas primigenius*, citato dal Verri [1] anche nei depositi detritici ad est del Piegaro, denota il *Rissiense*, mentre le altre due specie, rappresentanti di una fauna calda infraglaciale, attestano che le alluvioni, in cui esse sono comprese, debbono riferirsi allo *Chelleense*, come lo dimostrano anche gli avanzi paleolitici dell'industria umana, ivi raccolti. Così, presso Bosco sulla riva sinistra del Tevere e nei dintorni di S. Egidio sulla riva destra del Chiascio, in corrispondenza di alcune zone dell'alta terrazza, esistono dei manufatti di selce (forme amigdaloidi ed affini su ciottolo con margine scheggiato o irregolarmente sinuoso, forme discoidali, raschiatoi su ciottolo, pugnali ottenuti da un ciottolo allungato a facce parallele, scheggie atipiche, nuclei voluminosi, alcuni dei quali appena scheggiati), che presentano strette relazioni coi giacimenti classici di Chelles e St. Acheul in Francia [2].

[1] Verri A., *Di alcune divergenze sulla geologia dell'Umbria superiore*. Boll. Soc. geol. ital., vol. III.

[2] Bellucci G., *L'epoca paleolitica nell'Umbria*. Arch. per l'Antropologia e la Etnologia, vol. XLIV, 1914.

Lungo la valle del Tevere, tra Pierantonio e Ponte Valleceppi, l'alta terrazza è assai ben distinta soprattutto nella riva destra del fiume; mentre i dorsi del pianalto pliocenico si trovano ad una media altitudine di 290-300 m., l'alta terrazza, costituita da una spiaggia lievemente inclinata, da circa 208 m. sale fino a 220-230 m., presentando alla superficie uno strato di ciottoli marnosi appiattiti e di frammenti di selce scura, il quale riposa sopra delle sabbie silicee racchiudenti i resti dell'industria litica suddetta.

All'alta terrazza succede, mediante un gradino non sempre distinto, un altro ripiano o *bassa terrazza* a circa 12 m. al disotto della precedente ed a circa 8 m. sul livello attuale del fiume. Esso è formato da ghiaie e sabbie argillose, in mezzo alle quali a Bosco ed a S. Angelo di Celle abbondano manufatti strettamente affini al tipo mousteriense (forme amigdaloidi ovalari o triangolari, asce semilunari, raschiatoi, punte su scheggie ecc.) (1).

A sud di Perugia l'alta terrazza della riva destra del Tevere si addossa ininterrottamente all'altipiano pliocenico e, profilandosi dalla quota 200 alla quota 175, viene a terminare presso Fratta Todina, dove il Tevere si trova a scorrere incassato entro le rocce del Terziario inferiore. Quella della riva sinistra è dominata fino al Chiascio dai terreni villafranchiani, mantenendosi ad un'altitudine media di 190 metri; va poi ad unirsi all'alta terrazza del Chiascio e rimane interrotta sino alla Madonna dei Bagni (196 m.). Ivi si riprende e presso le Terme (167 m.) si confonde coll'alta terrazza di destra del torrente Puglia; da Collepepe, infine, continua fino a Ponte Rio di Todi, elevandosi a quote che variano dai 173 ai 156 metri.

Le due basse terrazze dall'altitudine media di 170 m. discendono con lievissime inclinazioni sino ai depositi attuali del Tevere; anche di queste ultime la più sviluppata è quella di destra, poichè lungo la sponda sinistra il fiume scorre in varî punti a ridosso dell'alta terrazza.

Al Pleistocene sono da riferirsi pure i numerosi lembi di travertino, che si trovano sempre in relazione a rilievi calcarei. Nei dintorni di Perugia (Castel del Piano), al vasto affioramento di travertino di Ellera e dei Sodi di S. Sabina seguono dei depositi di terra rossa, in cui si trovano mescolati frammenti di quella roccia e contenenti presso Pila numerosi manufatti litici, che rammentano alcune forme caratteristiche dei giacimenti di Aurignac, di Solutré e de la Magdaleine (1). È lecito, quindi, dedurre che il deposito del travertino è avvenuto nel periodo infraglaciale succeduto al Mousteriense.

Coeve alla formazione del travertino sono verisimilmente le caverne, che si osservano nei rilievi calcarei dei Monti Martani e del M. Tezio (2). Esse furono prodotte da correnti sotterranee provenienti dall'interno della

(1) Bellucci G., loc. cit.

(2) Principi P., *Secondo contributo allo studio dei fenomeni carsici dell'Umbria*. Mondo sotterr., Udine, 1913. — Id., *Intorno ad alcune grotte presso il M. Civitelle (Perugia)*. Mondo sotterr., Udine, 1913.

massa montuosa, entro cui si aprono; alcune, come quella del « Ticche-tacche » dei Monti Martani, corrispondono alle *caverne di sbocco* del De Gasperi; altre, come quella dei « Banditi » della stessa località, alle *caverne assorbenti*, mentre le « Buche del Diavolo » del M. Civitelle rientrano nel gruppo delle *inattive* dell'autore ora menzionato (1).

Il fenomeno carsico nel territorio studiato non assume la grandiosità caratteristica di altre regioni, per lo sviluppo che prendono i calcari cretacei e giurassici intercalati a strati marnosi ed argillosi (scisti a fucoidi, strati ad aptici), i quali ostacolarono ed interruppero la circolazione delle correnti sotterranee. Infatti le doline si aprono generalmente là dove affiorano i calcari dell'Infracretaceo, del Giura superiore e del Lias inferiore, costituenti delle spesse pile di strati non interrotti da formazioni impermeabili.

Al Pleistocene appartengono anche le falde detritiche che ammantano le pendici dei monti mesozoici (M. Subasio, rilievi presso Campello sul Clitunno, Catena martana ecc.) ed i materiali vulcanici, che sono sparsi in piccoli lembi nella parte meridionale della regione in esame.

Prescindendo dall'Orvietano, costituito essenzialmente da colate di tefriti leucitiche, da tufi litoidi e giallicci incoerenti, rileveremo come presso Città della Pieve, Morrano, S. Faustino, la Capretta, Titignano e lungo il versante occidentale dei Monti Martani, si osservano piccoli lembi di tufi stratiformi, i quali ora si trovano ad occupare alcune depressioni scavate nel Villafranchiano, ora giacciono direttamente su rocce del Terziario antico o del Mesozoico, ora sono mescolati insieme coi detriti di falda, come appunto si verifica presso Massa Martana ed Acquasparta. Questi lembi tufacei, rappresentanti i prodotti vulcanici delle eruzioni dei Vulcani Vulsini, sono residui di una formazione molto più sviluppata e che le acque hanno profondamente eroso.

Altri piccoli lembi di tufo, che si trovano presso il Pornello, ed alcuni depositi di tufi-pozzolane, che si riscontrano presso Cerqueto ed a S-O di Marsciano, dove riposano direttamente sui terreni argillo-sabbiosi del Villafranchiano, sono, invece, in relazione coll'attività eruttiva del vulcanetto di Pian di Celle (S. Venanzo), che sorge presso la strada provinciale Marsciano-M. Peglia. Infatti, questi ultimi tufi presentano quasi costantemente le stesse caratteristiche di quelli del vulcano ora ricordato, cioè grande abbondanza di olivina, accompagnata da augite e sanidino.

Nei campioni provenienti dalle trivellazioni di un pozzo artesiano di Cannara, a cominciare dalla profondità di circa 9 m. dalla superficie della pianura, si riscontrano numerose scorie vulcaniche, le quali dimostrano che l'attività dei Vulcani Vulsini doveva essere notevole anche verso la fine del Pleistocene, per poi spegnersi gradatamente nell'Olocene.

I depositi fluviali olocenici (alluvioni sabbioso-ghiaiose, ciottolose) sono sviluppati lungo il letto del Tevere, del Topino, del Nestore, del Chiascio,

(1) De Gasperi G. B., *Grotte e voragini del Friuli*. Mondo sotterr., vol. XI.

del Tescio, della Caina, della Genna, del Puglia e di altri corsi d'acqua, che formano l'attuale rete idrografica; mentre i depositi lacustri dello stesso periodo costituiscono la pianura sottostante a Magione ed al M. Malbe, nella quale si raccolgono copiosi frammenti di torba, e quella di Assisi, che prosegue fino a Foligno e Spoleto (*Valle umbra*). I materiali di quest'ultima conca sono rappresentati da una alternanza di argille sabbiose con strati di ghiaia e di sabbia ed accennano non solo ad essere stati depositati in seno alle acque di un lago, ma anche sotto forma di alluvioni, man mano che lo specchio lacustre veniva a scomparire. Lungo le pendici meridionali del Subasio si riscontrano dei letti ghiaiosi, i quali non rappresentano altro che resti di coni di deiezione più o meno profondamente rimaneggiati. Coni assai rilevanti sono quelli del Topino, del Tescio, del Chiascio, il quale ultimo forma presso Bastiola un potente strato di ghiaia ricoperto poi da altri depositi del fiume.

Riassumiamo nel quadro seguente l'ordinamento dei terreni pliocenici e quaternari dell'Umbria centrale:

Pliocene superiore (Quaternario inf. secondo Haug e Rovereto) (1).	Villafranchiano: sabbie, argille con molluschi terrestri e lacustri e con *Rhinoceros etruscus, Hippopotamus major, Cervus dicranius, Bos etruscus*, ecc.; depositi di lignite con *Mastodon arvernensis, Tapirus arvernensis* [Spoleto, Pietrafitta, Gubbio].	
	Mindeliense: giacimenti ciottolosi su altipiani a 200 m. circa sugli alvei attuali [Todi, Montefalco, Perugia].	
Pleistocene (Quaternario medio, secondo Haug e Rovereto) (1).	Rissiense: depositi fluviali dell'*alta terrazza* con *Elephas primigenius* [Piegaro].	
	Chelleense: depositi alluvionali costituiti da sabbie argillose con intercalazioni di lenti ghiaiose ad elementi minuti con *Elephas antiquus, Rhinoceros Mercki* (*periodo infraglaciale*); manufatti litici riferibili alle forme di Chelles e St. Acheul [Bosco, S. Egidio].	
	Wurmiense: Mousteriense: alluvioni della *bassa terrazza* con manufatti litici riferibili alle forme di Moustier [Bosco, S. Angelo di Celle].	tufi vulcanici [S. Venanzo, Pornello, S. Faustino, Marsciano ecc.]; detriti di falda [Subasio, Monti Martani ecc.].
	Wurmiense: Aurignaciense-Magdaleniense: travertini (*periodo infraglaciale*); terra rossa con detriti travertinosi e manufatti litici analoghi ai giacimenti di Aurignac, Solutré e la Magdaleine [Pila]; caverne dei Monti Martani e del M. Civitelle.	
Olocene	Tufi e scorie vulcaniche; depositi fluviali e lacustri con ghiaie, sabbie e argille [Valle del Tevere, Valle folignate-spoletina, Conca di Magione ecc.].	

(1) Rovereto G., *Tentativo di ordinamento del Quaternario italiano.* Boll. Soc. geol. ital., 1919.

Biologia. — *Osservazioni biologiche sull'Iridomyrmex humilis* (1). Nota della dott.ssa Lidia La Face, presentata dal Socio B. Grassi.

Avendo intrapreso, per consiglio del prof. Grassi, alcune ricerche sull'*Iridomyrmex humilis*, formica originaria dell'America e introdottasi da qualche anno in Italia, ho rivolto dapprima la mia attenzione sulla biologia di quest'insetto nelle nostre regioni. Sono stata quindi portata a considerare quale importanza potesse avere nella dispersione naturale di questa specie il volo nuziale, che, com'è noto, rappresenta nelle formiche il punto di partenza per la formazione di nuove colonie.

Newell e Barber, in seguito ad osservazioni compiute sulla medesima specie nella Luisiana (Stati Uniti), avevano stabilito che il volo nuziale era ivi un avvenimento assai raro a verificarsi, avendolo constatato una sola volta durante cinque anni, e che quindi le giovani regine potevano essere fecondate nell'interno del formicaio; ma non riferiscono nel loro lavoro (2) particolari osservazioni od esperimenti fatti per precisare meglio come avvenga la fecondazione nella specie suddetta. Ho creduto opportuno di studiare l'andamento di questo fenomeno nelle nostre regioni per vedere se su di esso esercitassero qualche influenza le diverse condizioni di ambiente, e di precisare meglio alcuni dettagli. Le mie osservazioni sono state fatte sia su colonie naturali, sia su colonie allevate in nidi artificiali costruiti sullo stesso modello di quelli usati da Newell e Barber nelle loro esperienze.

Nella seconda metà dell'aprile ho potuto osservare in nidi naturali di alcuni giardini di Roma, infestati dall'*Iridomyrmex hum.*, numerose larve e ninfe di maschi e di regine, e nel maggio i primi individui alati. Gli autori su menzionati non hanno trovato se non molto raramente le femmine alate nei formicai naturali (soltanto tre durante il periodo delle loro osservazioni), ma ciò è dovuto alla brevità del periodo in cui esse compaiono. Ho notato infatti che le femmine alate si rinvengono facilmente nei nidi naturali soltanto negli ultimi giorni di maggio e nei primi di giugno: nella seconda metà

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Entomologia agraria della R. Università di Roma.

(2) The Argentine Ant by Newell and Barber; U. S. Department of agriculture, Bureau of entomology — Bulletin N.° 122 — June 26, an. 1913.

di questo mese non si trovano più che regine prive delle ali, quindi già fecondate. I maschi, invece, si rinvengono sino al luglio, nel qual mese vanno diminuendo di numero sino a scomparire del tutto. Durante tutto il periodo in cui si svilupparono nei formicai naturali gli individui alati, non ho mai assistito ad alcun volo nuziale, nè ho mai visto i maschi e le femmine vagare all'esterno dei formicai, sebbene abbia fatto in proposito numerose osservazioni in differenti punti di Roma, sotto diverse condizioni metereologiche e in diverse ore del giorno.

In un nido artificiale, in cui avevo isolato una colonia composta di molte operaie, di una sola regina e di stadii immaturi, si svilupparono, nella seconda metà di giugno, quindi con qualche ritardo rispetto a quanto si era verificato nei nidi naturali, parecchi maschi e sei nuove regine. Non mi è stato possibile di osservare direttamente in questo nido la fecondazione, ma ho visto più volte i maschi inseguire attivamente le giovani regine cercando di accoppiarsi con esse. Dopo qualche giorno, ho trovato le nuove regine prive delle ali: ciò significava che le femmine della specie in questione potevano essere fecondate dentro il nido, come ho potuto meglio accertare in seguito.

Le nuove regine, dopo la fecondazione, furono uccise e divorate dalle operaie: queste le assalirono e, dopo avere staccato ad esse la testa dal torace e questo dall'addome, ne divorarono in poco tempo gli organi interni. Un'altra regina, tolta da un nido naturale e messa in questo stesso formicaio, ebbe la medesima sorte delle prime. Appare quindi verosimile che, quando lo spazio in cui è confinata una colonia è limitato e la popolazione diventa troppo numerosa, le operaie ne impediscono l'ulteriore aumento con l'uccisione delle nuove regine. È probabile però che nelle condizioni naturali ciò normalmente non si verifichi e che, quando in un formicaio le regine diventano troppo numerose, alcune di esse, unendosi ad un certo numero di operaie, migrino andando a fondare nuove colonie nelle vicinanze del nido in cui sono nate. Così si spiega come, alla fine della primavera, cioè dopo che è avvenuta la nascita delle nuove regine, attorno ad un formicaio primitivo se ne vedano sorgere numerosi altri a non molta distanza da esso. Anche i maschi nati nel nido suddetto furono, dopo le regine, uccisi e mangiati dalle operaie. Durante il periodo di un mese circa, in cui ho tenuto in osservazione i maschi di questo nido, non li ho mai veduti aggirarsi all'esterno di esso: li ho trovati spesso intenti a succhiare avidamente le larve e le ninfe presenti nel nido, nonostante la resistenza opposta dalle operaie.

Ho potuto osservare direttamente la fecondazione in un altro nido artificiale in cui avevo isolato, verso la metà di giugno, una colonia composta di una femmina ancora alata, di un maschio e di alcune operaie. Nulla di notevole accadde nel nido fino al 1° luglio, in cui posi nel nido alcuni

maschi tolti da un formicaio naturale: verso le sette del pomeriggio, sollevando il coperchio del nido, vidi che essi inseguivano vivacemente la giovane regina. Dopo un quarto d'ora circa, un maschio riuscì ad accoppiarsi con essa: trascorse 24 ore, trovai la regina dealata. Tre giorni dopo essa cominciò a deporre le uova e nel frattempo i maschi vennero uccisi e mangiati dalle operaie.

Resta così dimostrato che nell'*Iridomyrmex humilis* la fecondazione avviene normalmente nell'interno dei formicai e che, mancando il volo nuziale, la dispersione naturale della specie viene in tal modo notevolmente limitata. La capacità di volare non è però del tutto soppressa, almeno per ciò che riguarda i maschi. Ho, infatti, provato più volte di lasciare in libertà, all'aperto, alcuni maschi tolti da nidi naturali o artificiali, ed ho osservato che spontaneamente non spiccavano mai il volo. Soltanto se venivano in qualche modo molestati facevano uso delle ali, ma non potrei dire quali distanze siano stati capaci di percorrere. Non ho potuto ripetere il medesimo esperimento sulle femmine perchè si era nel giugno e in tal epoca esse erano tutte dealate.

Non è priva d'interesse la soppressione della funzione del volo, che normalmente si verifica in questa specie, quantunque le ali siano perfettamente sviluppate. Sarebbe opportuno di osservare se in essa i muscoli delle ali presentino particolari modificazioni rispetto a quelli delle altre specie di formiche in cui il volo nuziale rappresenta l'atto che accompagna necessariamente le fecondazione. Su quest'ultimo argomento mi propongo di riferire in seguito, quando avrò raccolto i dati necessarî.

G. C.